

Variables aléatoires

Loi de probabilité ■ Espérance ■ Variance & écart-type



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



Table des matières

1	Pourquoi les variables aléatoires ?	3
1.1	Du « lancer de dé » au « nombre qui dépend du hasard »	3
1.2	Les deux questions clés : « en moyenne ? » et « à quel point ça varie ? »	3
1.3	L'idée directrice	3
2	L'idée avant la formule	4
2.1	Une variable aléatoire, c'est une « machine à transformer le hasard en nombre »	4
2.2	La loi : la « carte d'identité » de la variable	4
2.3	L'espérance : la moyenne « sur le très long terme »	4
2.4	La variance et l'écart-type : la « largeur » du nuage	5
3	Le cours complet	6
3.1	Variable aléatoire et notations	6
3.2	Loi de probabilité	6
3.3	Espérance	7
3.4	Variance et écart-type	8
3.5	Transformations affines : $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\mathbb{V}(aX + b)$	10
3.6	Pour aller plus loin : la meilleure « prévision » (approfondissement)	12
3.7	Échantillon et simulation : l'espérance se « voit » en répétant	12
4	Boîte à outils : réflexes pour le bac	14
5	Exercices	17
6	Problème type prépa	19
7	✓ Corrigés détaillés	20

1 Pourquoi les variables aléatoires ?

1.1 Du « lancer de dé » au « nombre qui dépend du hasard »

Jusqu'ici, le hasard donnait des **événements** : « obtenir Pile », « tirer une boule rouge ». Mais dans la vraie vie, ce qui nous intéresse, c'est souvent un **nombre** : le **gain** à un jeu, le **nombre** de clients dans une file, la **durée** d'attente d'un bus, le **score** à un QCM répondu au hasard. Une **variable aléatoire**, c'est exactement ça : **un nombre dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire**.

Jeux gain moyen, mise équitable	Assurance coût moyen d'un sinistre	Qualité nb de pièces défectueuses	Données moyenne et dispersion
--	---	--	--

1.2 Les deux questions clés : « en moyenne ? » et « à quel point ça varie ? »

Dès qu'un nombre dépend du hasard, on veut savoir deux choses. **(1)** Autour de quelle valeur se situe-t-il **en moyenne**, si on répète l'expérience un grand nombre de fois ? C'est l'**espérance** $\mathbb{E}(X)$. **(2)** À quel point les résultats sont-ils **dispersés** autour de cette moyenne, groupés ou éparpillés ? C'est la **variance** $\mathbb{V}(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(X)$.

Intuition | Deux jeux peuvent avoir la même moyenne mais pas le même risque

Jeu A : tu gagnes toujours 2 €. Jeu B : une fois sur deux tu gagnes 102 €, une fois sur deux tu perds 98 €. Les deux ont la **même espérance** ($\mathbb{E} = 2$ €), mais le jeu B est **infiniment plus risqué**. La moyenne ne suffit pas : il faut aussi mesurer la **dispersion**. C'est tout le rôle de la variance et de l'écart-type.

1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

Une **variable aléatoire** X transforme chaque résultat du hasard en un **nombre**. Sa **loi** est la liste de toutes ses valeurs possibles avec leurs **probabilités**. À partir de cette loi, on calcule l'**espérance** (la moyenne « sur le long terme », $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$) et l'**écart-type** (la dispersion autour de cette moyenne). Tout le chapitre tient dans ce trio : **loi, espérance, dispersion**.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

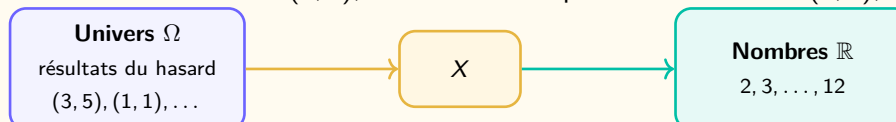
Les variables aléatoires sont le **langage** de toute la probabilité moderne et de la statistique. C'est ce chapitre qui prépare la **loi binomiale** et les grands théorèmes de Terminale (loi des grands nombres, intervalles de confiance). Et l'**espérance** est l'outil de décision n°1 dès qu'il y a de l'incertitude : assurances, finance, intelligence artificielle, jeux. Bien comprendre \mathbb{E} et σ aujourd'hui, c'est se simplifier énormément la Terminale.

2 L'idée avant la formule

2.1 Une variable aléatoire, c'est une « machine à transformer le hasard en nombre »

Intuition | De l'univers vers les nombres

Imagine une expérience aléatoire : ses résultats possibles forment l'**univers** Ω . Une variable aléatoire X est une **règle** qui à **chaque** résultat associe **un nombre**. Exemple : on lance deux dés, $X =$ « la somme des deux dés ». Au résultat $(3, 5)$, la machine X répond 8. Au résultat $(1, 1)$, elle répond 2.



Bref : **une variable aléatoire est une fonction** qui part de l'univers et arrive dans les nombres réels. C'est tout. Le mot « variable » dit qu'elle prend plusieurs valeurs ; le mot « aléatoire » dit que c'est le hasard qui décide laquelle.

2.2 La loi : la « carte d'identité » de la variable

Intuition | Lister les valeurs et leurs chances

Connaître une variable aléatoire, ce n'est pas connaître sa valeur (le hasard ne l'a pas encore décidée !). C'est connaître la **liste de ses valeurs possibles**, et pour **chacune**, sa **probabilité**. Cette liste s'appelle la **loi de probabilité**. On la range presque toujours dans un **tableau** :

valeur x_i	x_1	x_2	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...

Une seule règle d'or : la somme de toutes les probabilités vaut **exactement 1** (l'un des résultats **va** forcément arriver).

2.3 L'espérance : la moyenne « sur le très long terme »

Intuition | Si tu jouais 1000 fois, combien gagnerais-tu en moyenne ?

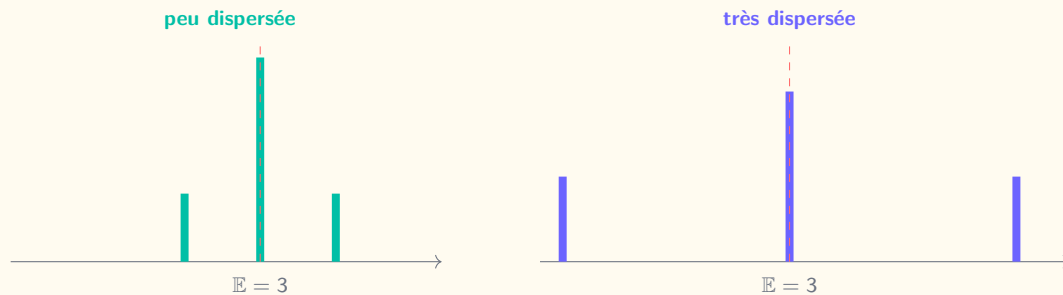
L'espérance n'est rien d'autre qu'une **moyenne**, mais une moyenne où chaque valeur est **pondérée** par sa probabilité (les valeurs fréquentes comptent plus). Concrètement : si tu répétais l'expérience des **milliers de fois** et que tu faisais la moyenne de tous tes résultats, tu tomberais très près de $\mathbb{E}(X)$.

Exemple parlant. Une roue donne 0 € (1 fois sur 2), 10 € (1 fois sur 4) ou 40 € (1 fois sur 4). Sur 4 parties « typiques », tu gagnes environ $0 + 0 + 10 + 40 = 50$ €, soit 12,5 € **par partie**. C'est exactement $0 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 12,5$. L'espérance, c'est ce « par partie en moyenne ».

2.4 La variance et l'écart-type : la « largeur » du nuage

Intuition | Groupé ou éparpillé ?

Deux variables peuvent avoir la **même** espérance et pourtant « se comporter » de façon très différente : l'une reste collée à la moyenne, l'autre part dans tous les sens. La **variance** mesure cet éparpillement : c'est la **moyenne des carrés des écarts à l'espérance**. On l'élève au carré pour que les écarts au-dessus et en dessous ne s'annulent pas. L'**écart-type** $\sigma = \sqrt{V}$ ramène cette mesure à la même unité que X (des euros, des points...), donc il est plus « lisible ».



Même centre, « largeur » très différente : la variance distingue ces deux situations que l'espérance, seule, confondrait.

3 Le cours complet

3.1 Variable aléatoire et notations

Définition | Variable aléatoire réelle

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω (la liste de tous les résultats possibles).

Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction** qui, à chaque résultat ω de Ω , associe un nombre réel noté $X(\omega)$.

L'ensemble des valeurs que peut prendre X est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Attention | Le vocabulaire : $\{X = a\}$ est un événement

X est un **nombre** (aléatoire), mais dès qu'on fixe une valeur a , l'écriture $\{X = a\}$ désigne un **événement** : « l'ensemble des résultats pour lesquels X vaut a ». On peut donc lui attribuer une probabilité, notée $P(X = a)$. De même :

- $\{X \leq a\}$: l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a », de probabilité $P(X \leq a)$;
- $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$, $\{a \leq X \leq b\}$: même principe.

Passer du français aux symboles (et inversement) est une capacité attendue au bac : « au moins 2 » s'écrit $\{X \geq 2\}$, « strictement plus de 3 » s'écrit $\{X > 3\}$, etc.

Exemple | La somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et X est la **somme** des deux faces. Alors $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. Par exemple l'événement $\{X = 4\}$ regroupe les résultats $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, donc

$$P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

L'événement $\{X \leq 3\}$ regroupe $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, donc $P(X \leq 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3.2 Loi de probabilité

Définition | Loi de probabilité d'une variable aléatoire

La **loi de probabilité** de X est la donnée de toutes les valeurs x_i de $X(\Omega)$ et, pour chacune, de la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

✓ Propriété | La somme des probabilités vaut 1

Pour toute variable aléatoire,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

Démonstration | Pourquoi la somme fait 1

Les événements $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}$ sont **deux à deux incompatibles** (un même résultat ne peut pas donner deux valeurs différentes de X) et leur réunion est **l'univers tout entier** (le hasard donne **toujours** une valeur à X). Ils forment donc une **partition** de Ω . Or la somme des probabilités d'une partition vaut $P(\Omega) = 1$. D'où le résultat. Cette égalité est aussi un **outil de vérification** précieux : si tes probabilités ne totalisent pas 1, il y a une erreur quelque part.

Méthode | Déterminer la loi d'une variable aléatoire

1. **Identifier les valeurs** possibles : lister $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
2. **Calculer chaque probabilité** $P(X = x_i)$: par dénombrement, par un arbre, ou avec un tableau croisé (fiche 9).
3. **Dresser le tableau** de la loi.
4. **Vérifier** que la somme des probabilités vaut bien 1.

Exemple | Loi complète de la somme de deux dés

En dénombrant les 36 résultats équiprobables, on obtient :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Vérification : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ donc la somme des probabilités vaut $\frac{36}{36} = 1$. La valeur la plus probable est 7 : c'est logique, c'est celle qui se réalise du plus grand nombre de façons.

3.3 Espérance

Définition | Espérance d'une variable aléatoire

L'**espérance** de X , notée $\mathbb{E}(X)$ (parfois μ), est la **moyenne des valeurs pondérée par les probabilités** :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

Intuition | Lire la formule comme une moyenne de classe

C'est exactement le calcul d'une **moyenne pondérée**. Si dans une classe 10% ont 8, 60% ont 12 et 30% ont 16, la moyenne est $8 \times 0,10 + 12 \times 0,60 + 16 \times 0,30 = 12,8$. Pour une variable aléatoire, on remplace juste les « pourcentages d'élèves » par des « probabilités » : la formule est la même.

Attention | L'espérance n'est pas toujours une valeur atteinte

L'espérance de la somme de deux dés vaut 7 (heureusement, 7 est possible). Mais l'espérance d'un dé à six faces vaut $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$... et on n'obtient **jamais** 3,5 ! L'espérance est une **moyenne théorique**, pas une prédiction du prochain résultat. Elle dit ce qui se passe « en moyenne sur un grand nombre de répétitions ».

Définition | Jeu équitable

Dans un jeu où X désigne le **gain algébrique** du joueur (gains comptés positivement, pertes négativement, **mise comprise**), le jeu est dit :

- **équitable** si $\mathbb{E}(X) = 0$ (ni avantage, ni désavantage sur le long terme) ;
- **favorable** au joueur si $\mathbb{E}(X) > 0$, **défavorable** si $\mathbb{E}(X) < 0$.

Exemple | Un jeu de fête foraine

On paie 3 € pour lancer un dé. On reçoit le nombre d'euros indiqué par la face (donc de 1 à 6 €). Soit X le **gain algébrique** (ce qu'on reçoit moins la mise).

gain x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Si la face est 1, on reçoit 1 € pour 3 € payés, gain -2, etc.) Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

$\mathbb{E}(X) = 0,5 > 0$: le jeu est **favorable au joueur** (en moyenne il gagne 0,50 € par partie). L'organisateur a donc intérêt à augmenter la mise : avec une mise de 3,50 €, on aurait $\mathbb{E}(X) = 0$, le jeu serait **équitable**.

3.4 Variance et écart-type**Définition | Variance et écart-type**

Soit $\mu = \mathbb{E}(X)$. La **variance** de X est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = (x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n.$$

L'**écart-type** de X est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

La variance est **toujours positive** (somme de carrés multipliés par des probabilités positives).

Intuition | Pourquoi des carrés ? Pourquoi une racine ?

Pourquoi élever au carré ? Si on faisait la moyenne des écarts simples $(x_i - \mu)$, les écarts positifs et négatifs s'annuleraient **exactement** (la moyenne des écarts à la moyenne est nulle, toujours !).

En élevant au carré, tous les écarts deviennent positifs : ils s'ajoutent au lieu de se compenser.

Pourquoi reprendre la racine ? Le carré a changé l'unité (des euros², ça ne veut rien dire). L'écart-type $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}}$ revient à l'unité de départ : il se lit comme une « distance typique à la moyenne ».

★ Théorème | Formule de Kœnig-Huygens

Pour toute variable aléatoire X d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} \quad \text{où} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i.$$

Intuition | La formule qui fait gagner un temps fou

La définition demande de calculer d'abord μ , puis **tous** les écarts $(x_i - \mu)^2$: long et source d'erreurs (surtout si μ n'est pas un entier). La formule de Kœnig-Huygens dit : calcule plutôt $\mathbb{E}(X^2)$ (moyenne des **carrés des valeurs**), puis retranche μ^2 . **Beaucoup** plus rapide. Retiens-la comme « moyenne des carrés moins carré de la moyenne ».

Démonstration | Démonstration de la formule de Kœnig-Huygens

On part de la définition et on **développe le carré** $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$:

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2).$$

On **sépare la somme** en trois morceaux :

$$\mathbb{V}(X) = \underbrace{\sum_i p_i x_i^2}_{=\mathbb{E}(X^2)} - 2\mu \underbrace{\sum_i p_i x_i}_{=\mathbb{E}(X)=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_i p_i}_{=1}.$$

On a sorti 2μ et μ^2 des sommes car ce sont des **constantes**. En remplaçant chaque morceau par sa

valeur :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

On reconnaît $\mu^2 = (\mathbb{E}(X))^2$, ce qui est exactement la formule annoncée. ■

Méthode | Calculer \mathbb{E} , \mathbb{V} et σ à partir d'une loi

1. Calculer $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (mêmes probabilités, mais on met les valeurs **au carré**).
3. En déduire $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (Kœnig-Huygens).
4. Calculer $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Astuce pratique : pose un tableau à lignes x_i , p_i , $x_i p_i$, $x_i^2 p_i$ et somme les deux dernières lignes.

Exemple | Calcul complet sur un dé équilibré

Soit X le résultat d'un dé à six faces. On organise les calculs :

x_i	1	2	3	4	5	6	somme
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$x_i p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{91}{6}$

On lit directement : $\mathbb{E}(X) = \frac{21}{6} = 3,5$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{91}{6} \approx 15,17$. D'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12} \approx 2,92.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71.$$

Lecture : les résultats d'un dé s'écartent « en moyenne » d'environ 1,7 de la valeur centrale 3,5.

3.5 Transformations affines : $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\mathbb{V}(aX + b)$

Intuition | Changer d'échelle ou d'origine

Très souvent, on transforme une variable de façon **affine** : $Y = aX + b$. Exemples : convertir une température, ajouter une prime fixe à un gain ($+b$), doubler tous les gains ($\times a$). On voudrait $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ **sans** refaire toute la loi. Bonne nouvelle : il existe des formules directes, et elles sont très intuitives.

✓ Propriété | Espérance et variance d'une transformation affine

Pour tous réels a et b , si $Y = aX + b$ alors :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Intuition | Pourquoi le $+b$ disparaît dans la variance

Pour l'espérance, tout se comporte comme une moyenne : si on double tout puis qu'on ajoute b à chacun, la moyenne double puis augmente de b . Normal. **Pour la variance**, le $+b$ translate tout le nuage de points sans changer sa « largeur » : la dispersion ne bouge pas, donc b disparaît. Le facteur a , lui, **étire** le nuage : les écarts sont multipliés par a , donc leurs **carrés** par a^2 . D'où a^2 dans la variance, et $|a|$ (valeur absolue, car un écart-type est positif) dans l'écart-type.

Démonstration | Démonstration de $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Posons $Y = aX + b$. Quand X prend la valeur x_i (avec la probabilité p_i), Y prend la valeur $ax_i + b$ avec la **même** probabilité p_i . Donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_i (ax_i + b) p_i = \sum_i (ax_i p_i + bp_i) = a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i.$$

Or $\sum_i x_i p_i = \mathbb{E}(X)$ et $\sum_i p_i = 1$. D'où $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$. ■

Démonstration | Démonstration de $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

On utilise la définition avec $\mathbb{E}(Y) = a\mu + b$ (où $\mu = \mathbb{E}(X)$) :

$$\mathbb{V}(Y) = \sum_i p_i \left(\underbrace{(ax_i + b)}_{y_i} - \underbrace{(a\mu + b)}_{\mathbb{E}(Y)} \right)^2 = \sum_i p_i (ax_i - a\mu)^2 = \sum_i p_i a^2 (x_i - \mu)^2.$$

Le $+b$ s'est **simplifié** ($b - b = 0$). On sort la constante a^2 :

$$\mathbb{V}(Y) = a^2 \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 = a^2 \mathbb{V}(X).$$

En prenant la racine carrée : $\sigma(Y) = \sqrt{a^2 \mathbb{V}(X)} = |a| \sqrt{\mathbb{V}(X)} = |a| \sigma(X)$. ■

Exemple | Une prime et un bonus

Un jeu donne un gain X avec $\mathbb{E}(X) = 4$ et $\sigma(X) = 2$ (donc $\mathbb{V}(X) = 4$). Le casino propose une nouvelle règle : il **double** le gain et **ajoute** 5 €. Le nouveau gain est $Y = 2X + 5$. Alors

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 5 = 2 \times 4 + 5 = 13, \quad \mathbb{V}(Y) = 2^2 \mathbb{V}(X) = 4 \times 4 = 16, \quad \sigma(Y) = |2| \times 2 = 4.$$

La moyenne passe de 4 à 13 ; la dispersion (écart-type) double de 2 à 4 à cause du facteur 2, mais

le +5 n'y change rien.

3.6 Pour aller plus loin : la meilleure « prévision » (approfondissement)

Intuition | L'espérance minimise l'erreur quadratique

Si tu devais résumer X par **un seul nombre** x et qu'on mesurait ton erreur par la **moyenne des carrés** $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$, quel x choisir ? Réponse : $x = \mathbb{E}(X)$. Autrement dit, l'espérance est la valeur qui « colle le mieux » à X au sens des moindres carrés. C'est pour ça qu'elle est partout en statistique (et en intelligence artificielle).

Démonstration / $x \mapsto \mathbb{E}((X - x)^2)$ est minimale en $x = \mathbb{E}(X)$

Développons en utilisant la linéarité de l'espérance (avec $\mu = \mathbb{E}(X)$) :

$$f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2xX + x^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2x\mathbb{E}(X) + x^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu x + x^2.$$

C'est un **polynôme du second degré** en x , de la forme $x^2 - 2\mu x + \mathbb{E}(X^2)$, avec un coefficient de x^2 égal à $+1 > 0$: la parabole est tournée **vers le haut**, donc elle admet un **minimum**. Ce minimum est atteint en

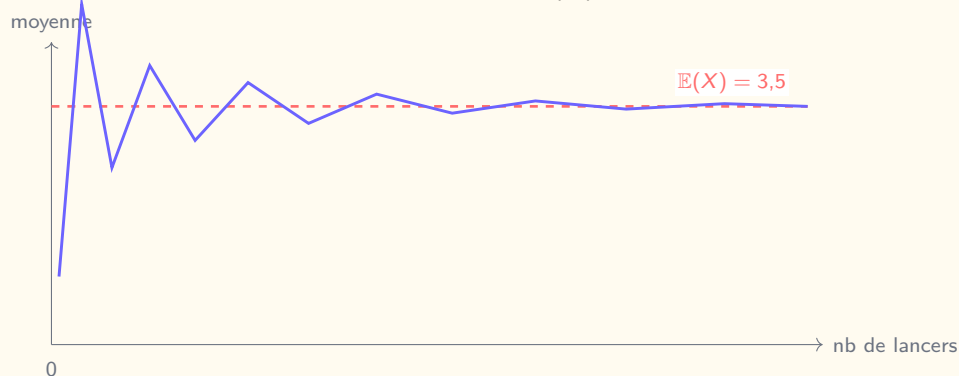
$$x = -\frac{-2\mu}{2 \times 1} = \mu = \mathbb{E}(X).$$

Et la valeur minimale vaut $f(\mu) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \mathbb{V}(X)$: on retrouve la variance ! La « plus petite erreur quadratique possible » est exactement la variance de X . ■

3.7 Échantillon et simulation : l'espérance se « voit » en répétant

Intuition | Plus on répète, plus la moyenne observée s'approche de $\mathbb{E}(X)$

On a répété qu'en jouant « un grand nombre de fois », la moyenne des résultats s'approche de l'espérance. On peut le **voir** en simulant : on tire un grand échantillon de valeurs de X et on calcule leur moyenne. Voici l'allure typique de la moyenne d'un dé en fonction du nombre de lancers : elle **oscille** au début, puis se **stabilise** vers $\mathbb{E}(X) = 3,5$.



Ce phénomène (la moyenne d'un grand échantillon se rapproche de l'espérance) sera énoncé précisément en Terminale sous le nom de **loi des grands nombres**. En Première, on s'en sert pour

estimer une espérance par simulation quand le calcul exact est compliqué.

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Loi** : lister les valeurs, calculer chaque $P(X = x_i)$, ranger en tableau, vérifier $\sum p_i = 1$.
2. **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$ (moyenne pondérée).
3. **Variance (rapide)** : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ avec $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$.
4. **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ (même unité que X).
5. **Affine** : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$; $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$; $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
6. **Jeu équitable** : $\mathbb{E}(\text{gain}) = 0$ (> 0 favorable, < 0 défavorable).
7. **Du français aux symboles** : « au moins k » = $\{X \geq k\}$, « au plus k » = $\{X \leq k\}$.

Attention | Top des erreurs à éviter

- **Oublier les probabilités dans l'espérance** : $\mathbb{E}(X)$ n'est PAS la moyenne des valeurs $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ (sauf si équiprobables). On pondère **toujours** par les p_i .
- **Confondre $\mathbb{E}(X^2)$ et $(\mathbb{E}(X))^2$** : ce sont presque toujours des nombres différents ! $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (on carre les valeurs), $(\mathbb{E}(X))^2$ (on carre la moyenne). Leur différence **est** la variance.
- **Mettre a au lieu de a^2 dans la variance**, ou garder le $+b$: $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$, sans b .
- **Variance négative** : impossible. Si tu trouves $\mathbb{V}(X) < 0$, tu as une erreur (souvent $\mathbb{E}(X^2)$ et $(\mathbb{E}(X))^2$ échangés).
- **Oublier la mise** dans un gain algébrique : le gain, c'est « ce qu'on reçoit moins ce qu'on a payé ».
- **Somme des probabilités $\neq 1$** : relire la loi, il manque une valeur ou une proba est fausse.

✓ Propriété | Récapitulatif des formules

Objet	Formule
Somme des probabilités	$\sum_i p_i = 1$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i$
Moment d'ordre 2	$\mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$
Variance (définition)	$\mathbb{V}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2$
Variance (Kœnig-Huygens)	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
Transformation affine	$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Méthode | Algorithme Python : espérance, variance, écart-type

```

1 from math import sqrt
2
3 def esperance(valeurs, probas):
4     return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))
5
6 def variance(valeurs, probas):
7     E = esperance(valeurs, probas)
8     E2 = sum(x**2 * p for x, p in zip(valeurs, probas)) #  $E(X^2)$ 
9     return E2 - E**2 # Koenig-Huygens
10
11 def ecart_type(valeurs, probas):
12     return sqrt(variance(valeurs, probas))
13
14 # Exemple : un dé à six faces
15 val = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
16 pro = [1/6] * 6
17 print(esperance(val, pro)) # 3.5
18 print(variance(val, pro)) # 2.9166...
19 print(ecart_type(val, pro)) # 1.7078...

```

Méthode | Algorithme Python : estimer $\mathbb{E}(X)$ par simulation

```

1 from random import randint
2
3 def moyenne_des_lancers(n):
4     total = 0
5     for _ in range(n):
6         total += randint(1, 6) # un lancer de dé
7     return total / n
8
9 print(moyenne_des_lancers(100)) # proche de 3.5
10 print(moyenne_des_lancers(1000000)) # très proche de 3.5
11 # Plus n est grand, plus la moyenne s'approche de  $E(X) = 3.5$ 

```

Méthode | Algorithme Python : fréquence des lettres d'un texte

```

1 def frequences(texte):
2     texte = texte.lower()
3     lettres = [c for c in texte if c.isalpha()]
4     n = len(lettres)
5     freq = {}
6     for c in lettres:
7         freq[c] = freq.get(c, 0) + 1
8     for c in freq:

```

```
9         freq[c] = freq[c] / n    # frequency = effectif / total
10     return freq
11
12 # En français, le 'e' ressort très fréquent (~15 à 18 %).
13 # C'est la loi de la variable "lettre tirée au hasard dans le texte".
```


5 Exercices

Exercice 1 ★★ : Lire une loi

Soit X une variable aléatoire de loi :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,4	a

1. Déterminer a . 2. Calculer $P(X \geq 2)$. 3. Calculer $P(X \leq 0)$.

Exercice 2 ★★ : Une espérance simple

Une variable X prend les valeurs 10, 20, 30 avec les probabilités respectives 0,5 ; 0,3 ; 0,2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 ★★ : Vérifier puis espérer

Y prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec $P(Y = 0) = 0,4$, $P(Y = 1) = 0,3$, $P(Y = 2) = 0,2$, $P(Y = 3) = 0,1$.

1. Vérifier que c'est bien une loi. 2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4 ★★ : Variance et écart-type

Reprendre la variable Y de l'exercice 3. Calculer $\mathbb{E}(Y^2)$, puis $\mathbb{V}(Y)$ par Kœnig-Huygens, puis $\sigma(Y)$ (arrondi au centième).

Exercice 5 ★★ : Du français aux symboles

Soit X le nombre de bonnes réponses à un QCM de 4 questions. Traduire en événements puis en probabilités les phrases : **(a)** « avoir au moins 3 bonnes réponses » ; **(b)** « avoir strictement moins de 2 bonnes réponses » ; **(c)** « avoir entre 1 et 3 bonnes réponses incluses ».

Exercice 6 ★★ : Un dé truqué

Un dé est truqué : la probabilité d'obtenir chaque face est proportionnelle à sa valeur (la face k a une probabilité λk). 1. Déterminer λ . 2. Dresser la loi de X (la face obtenue). 3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7 ★★ : Jeu de la roue

Une roue équilibrée comporte 8 secteurs identiques : trois « 0 € », trois « 5 € », un « 20 € » et un « 50 € ». On paie 10 € pour jouer. Soit X le gain algébrique. 1. Donner la loi de X . 2. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? 3. Quel prix rendrait le jeu équitable ?

Exercice 8 ★★ : Deux dés, le maximum

On lance deux dés équilibrés et M est le **plus grand** des deux résultats (le maximum). 1. Déterminer $M(\Omega)$. 2. Montrer que $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ pour k de 1 à 6. 3. Calculer $\mathbb{E}(M)$.

Exercice 9 ★★ : Transformation affine

X vérifie $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\mathbb{V}(X) = 9$. On pose $Z = -2X + 5$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\sigma(Z)$.

Exercice 10 ★★★ : Tirage sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire **simultanément** 2 boules. Soit X le nombre de boules rouges tirées. 1. Déterminer la loi de X . 2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11 ★★★ : Assurance

Une compagnie assure un objet de valeur 2000 €. La probabilité d'un sinistre total (remboursement de 2000 €) dans l'année est 0,03. La compagnie veut que son **bénéfice espéré** soit de 25 € par contrat. Quel montant de prime annuelle doit-elle demander ? (On note p la prime ; le bénéfice de la compagnie est p s'il n'y a pas de sinistre, $p - 2000$ sinon.)

Exercice 12 ★★★ : Loi à paramètre

Soit X de loi $P(X = k) = \frac{k}{10}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. 1. Vérifier que c'est une loi. 2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 13 ★★★ : Jeu de dés à deux étages

On lance un dé. Si on obtient 6, on gagne 12 €. Sinon, on relance le dé : on gagne alors le double de la nouvelle face en euros. Soit G le gain. 1. Déterminer les valeurs possibles de G et leur probabilité. 2. Calculer $\mathbb{E}(G)$.

Exercice 14 ★★★ : Comparer deux stratégies

Deux placements d'un an pour 1000 €. **Placement A** : gain certain de 30 €. **Placement B** : gain de 130 € avec probabilité 0,5, perte de 60 € avec probabilité 0,5. 1. Calculer \mathbb{E} et σ du gain pour chaque placement. 2. Lequel choisir ? Discuter selon le profil (prudent / joueur).

Exercice 15 ★★★ : Espérance et second degré

Soit X de loi : $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$, $P(X = 5) = 0,3$. On considère la fonction $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$. 1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x (forme développée). 2. Pour quelle valeur de x est-elle minimale ? Que vaut ce minimum ? Relier aux notions du cours.

Exercice 16 ★★★ : Un peu de Python

On donne la fonction `esperance(valeurs, probas)` du cours. Écrire une fonction Python `est_equitable` (de paramètres `valeurs` et `probas`) qui renvoie `True` si le jeu de gain associé est équitable (espérance nulle, à 10^{-9} près), `False` sinon. Tester sur le jeu de l'exemple du cours.

6 Problème type prépa

Problème style prépa : *le jeu de la différence*

Ce problème mobilise **toutes** les notions de la fiche : loi, espérance, variance, transformation affine, jeu équitable, et un soupçon d'algorithmique. Prends ton temps, chaque question prépare la suivante.

Partie A : un jeu de dés classique

Un joueur lance **deux dés équilibrés** et s'intéresse à la variable $D = |D_1 - D_2|$, la **valeur absolue de la différence** des deux faces.

1. Déterminer $D(\Omega)$ et la loi de D (on pourra s'aider d'un tableau à double entrée des 36 résultats).
2. Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ (utiliser Kœnig-Huygens).

Partie B : on en fait un jeu d'argent

On propose la règle suivante : le joueur mise m euros ; il reçoit D^2 euros (le carré de la différence). Soit $G = D^2 - m$ le gain algébrique.

3. Exprimer $\mathbb{E}(G)$ en fonction de m . *Indication : $\mathbb{E}(D^2)$ a déjà été calculé en partie A.*
4. Déterminer la mise m qui rend le jeu **équitable**.
5. Avec cette mise, le jeu est équitable « en moyenne ». Pourtant un joueur prudent hésite. Calculer $\sigma(G)$ et expliquer en une phrase pourquoi l'écart-type éclaire ce choix.

Partie C : simulation

6. Écrire une fonction Python `simule_gain(n, m)` qui simule n parties du jeu de la partie B (mise m) et renvoie le gain moyen observé. Vers quelle valeur ce gain moyen doit-il tendre quand n devient grand, si m est la mise équitable ?

7 ✓ Corrigés détaillés

Corrigé 1

Démonstration

1. La somme des probabilités vaut 1 :

$$0,3 + 0,1 + 0,4 + a = 1 \implies 0,8 + a = 1 \implies a = 0,2.$$

2. $\{X \geq 2\}$ regroupe les valeurs 2 et 5 :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 5) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

3. $\{X \leq 0\}$ regroupe les valeurs -1 et 0 :

$$P(X \leq 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

Corrigé 2

Démonstration

On applique la définition $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$:

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times 0,5 + 20 \times 0,3 + 30 \times 0,2 = 5 + 6 + 6 = 17.$$

En moyenne, sur un grand nombre de répétitions, X vaut 17.

Corrigé 3

Démonstration

1. Somme : $0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1$. Toutes les probabilités sont positives : c'est bien une loi de probabilité.

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = 0 + 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1.$$

Corrigé 4

Démonstration

On reprend $\mathbb{E}(Y) = 1$. Calculons $\mathbb{E}(Y^2)$: on garde les mêmes probabilités mais on **carre** les valeurs :

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,1 = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,9 = 2.$$

Par Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Écart-type :

$$\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sqrt{1} = 1,00.$$

Corrigé 5*Démonstration*

(a) « au moins 3 » signifie 3 ou plus : événement $\{X \geq 3\}$, probabilité $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$.

(b) « strictement moins de 2 » signifie 0 ou 1 : événement $\{X < 2\} = \{X \leq 1\}$, probabilité $P(X = 0) + P(X = 1)$.

(c) « entre 1 et 3 inclus » : événement $\{1 \leq X \leq 3\}$, probabilité $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.

Corrigé 6*Démonstration*

1. La face k a une probabilité λk . La somme doit valoir 1 :

$$\sum_{k=1}^6 \lambda k = \lambda(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{21}.$$

2. Loi de X :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

3. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{k}{21} = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3} \approx 4,33.$$

Le dé étant truqué en faveur des grandes faces, son espérance ($\approx 4,33$) est supérieure à celle d'un dé équilibré (3,5) : cohérent.

Corrigé 7

Démonstration

1. Sur 8 secteurs : trois donnent 0 €, trois donnent 5 €, un donne 20 €, un donne 50 €. Le gain algébrique retrace la mise de 10 € :

gain x_i	-10	-5	10	40
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(Recevoir 0 donne un gain -10 ; recevoir 5 donne -5 ; recevoir 20 donne 10 ; recevoir 50 donne 40.)

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{3}{8} - 5 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} + 40 \times \frac{1}{8} = \frac{-30 - 15 + 10 + 40}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

$\mathbb{E}(X) = 0,625 > 0$: le jeu est **favorable au joueur** (gain moyen de 0,625 € par partie). L'organisateur perd de l'argent sur le long terme.

3. Notons p le prix. Le gain devient $x'_i = (\text{reçu}) - p$, et

$$\mathbb{E}(\text{gain}) = \left(0 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{1}{8}\right) - p = \frac{15 + 20 + 50}{8} - p = \frac{85}{8} - p.$$

Le jeu est équitable quand cette espérance est nulle : $p = \frac{85}{8} = 10,625$ €. Il faudrait donc faire payer 10,625 €.

Corrigé 8

Démonstration

1. Le maximum de deux faces va de 1 à 6 : $M(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. $\{M = k\}$ signifie : les deux dés sont $\leq k$, mais pas tous les deux $\leq k-1$. Le nombre de couples avec les deux faces $\leq k$ est k^2 ; avec les deux $\leq k-1$, c'est $(k-1)^2$. Donc le nombre de couples où le maximum vaut exactement k est

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1.$$

Comme les 36 couples sont équiprobables, $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$.

Vérification : $\sum_{k=1}^6 (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$, donc la somme des probabilités vaut 1.

✓

3. Espérance :

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 (2k^2 - k) = \frac{1}{36} (2 \times 91 - 21) = \frac{182 - 21}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

(On a utilisé $\sum k^2 = 91$ et $\sum k = 21$ pour k de 1 à 6.)

Corrigé 9

Démonstration

On applique les formules affines avec $a = -2$ et $b = 5$:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(-2X + 5) = -2\mathbb{E}(X) + 5 = -2 \times 6 + 5 = -7.$$

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(-2X + 5) = (-2)^2 \mathbb{V}(X) = 4 \times 9 = 36.$$

$$\sigma(Z) = |-2| \sigma(X) = 2\sqrt{9} = 2 \times 3 = 6.$$

Remarque : le signe de a change l'espérance mais **pas** la variance (le carré efface le signe), et le $+5$ ne change que l'espérance.

Corrigé 10

Démonstration

1. On tire 2 boules parmi 5 : il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables. X (nombre de rouges) peut valoir 0, 1 ou 2.

- $X = 0$: les 2 boules sont vertes, $\binom{2}{2} = 1$ façon. $P(X = 0) = \frac{1}{10}$.
- $X = 1$: une rouge ($\binom{3}{1} = 3$) et une verte ($\binom{2}{1} = 2$), soit $3 \times 2 = 6$. $P(X = 1) = \frac{6}{10}$.
- $X = 2$: les 2 rouges, $\binom{2}{2} = 1$ façon. $P(X = 2) = \frac{1}{10}$.

Vérification : $\frac{1+6+1}{10} = 1$. ✓

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{0+6+2}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Pour la variance, $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} = \frac{0+6+4}{10} = \frac{10}{10} = 1$. Donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Corrigé 11

Démonstration

Soit B le bénéfice de la compagnie. Avec probabilité 0,97 (pas de sinistre) il vaut p ; avec probabilité 0,03 (sinistre) il vaut $p - 2000$:

$$\mathbb{E}(B) = p \times 0,97 + (p - 2000) \times 0,03 = p(0,97 + 0,03) - 2000 \times 0,03 = p - 60.$$

On veut $\mathbb{E}(B) = 25$:

$$p - 60 = 25 \implies p = 85.$$

La compagnie doit demander une prime de **85 €**. (Interprétation : 60 € couvrent le coût moyen des

sinistres, 25 € sont le bénéfice visé.)

Corrigé 12

Démonstration

1. Somme : $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{10} = \frac{1+2+3+4}{10} = \frac{10}{10} = 1$. C'est bien une loi.

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

Moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2 \cdot \frac{k}{10} = \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

Variance et écart-type :

$$\mathbb{V}(X) = 10 - 3^2 = 10 - 9 = 1, \quad \sigma(X) = \sqrt{1} = 1.$$

Corrigé 13

Démonstration

1. Premier lancer : avec probabilité $\frac{1}{6}$ on obtient 6 et le gain est 12 €. Avec probabilité $\frac{5}{6}$ on relance, et on gagne le double de la nouvelle face, soit 2, 4, 6, 8, 10 ou 12 € selon la face 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La valeur $G = 12$ peut venir **de deux façons** : soit un 6 au premier lancer ($P = \frac{1}{6}$), soit un relancer suivi d'un 6 ($P = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$). Les autres valeurs 2, 4, 6, 8, 10 viennent uniquement du second lancer, chacune avec probabilité $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

G	2	4	6	8	10	12
P	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$

Vérification : $5 \times 5 + 11 = 36$, somme des probabilités = $\frac{36}{36} = 1$. ✓ (Pour $G = 12$: on a regroupé $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ du « 6 direct » et $\frac{5}{36}$ du « relancer puis 6 ».)

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{5}{36}(2+4+6+8+10) + 12 \times \frac{11}{36} = \frac{5 \times 30}{36} + \frac{132}{36} = \frac{150+132}{36} = \frac{282}{36} = \frac{47}{6} \approx 7,83.$$

Corrigé 14

Démonstration

Placement A. Le gain est **certain** : $G_A = 30$ avec probabilité 1. Donc

$$\mathbb{E}(G_A) = 30, \quad \mathbb{V}(G_A) = 0, \quad \sigma(G_A) = 0.$$

Aucune incertitude.

Placement B. Loi : +130 avec 0,5 et -60 avec 0,5.

$$\mathbb{E}(G_B) = 130 \times 0,5 + (-60) \times 0,5 = 65 - 30 = 35.$$

$$\mathbb{E}(G_B^2) = 130^2 \times 0,5 + (-60)^2 \times 0,5 = \frac{16900 + 3600}{2} = \frac{20500}{2} = 10250.$$

$$\mathbb{V}(G_B) = 10250 - 35^2 = 10250 - 1225 = 9025, \quad \sigma(G_B) = \sqrt{9025} = 95.$$

2. Discussion. En **moyenne**, B rapporte plus ($35 > 30$). Mais B a un écart-type énorme (95 €) contre 0 pour A : il comporte un vrai risque de perte (-60 € une fois sur deux). Un profil **prudent** préférera A (gain sûr), un profil **joueur** préférera B (espérance plus élevée, en acceptant le risque). C'est exactement le rôle de l'écart-type : il chiffre le risque que l'espérance, seule, masque.

Corrigé 15

Démonstration

1. On développe en utilisant la linéarité :

$$f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2x\mathbb{E}(X) + x^2.$$

Calculons les ingrédients :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 5 \times 0,3 = 0 + 1 + 1,5 = 2,5,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,5 + 5^2 \times 0,3 = 0 + 2 + 7,5 = 9,5.$$

Donc

$$f(x) = x^2 - 2 \times 2,5x + 9,5 = x^2 - 5x + 9,5.$$

2. C'est un trinôme du second degré de coefficient dominant $+1 > 0$: minimum atteint en

$$x = -\frac{-5}{2 \times 1} = \frac{5}{2} = 2,5 = \mathbb{E}(X).$$

Le minimum vaut $f(2,5) = 2,5^2 - 5 \times 2,5 + 9,5 = 6,25 - 12,5 + 9,5 = 3,25$. Or

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 9,5 - 2,5^2 = 9,5 - 6,25 = 3,25.$$

On retrouve bien : le minimum de f est atteint en $x = \mathbb{E}(X)$ et vaut $\mathbb{V}(X)$. C'est l'illustration du résultat du cours (l'espérance est la meilleure « résumé » au sens des moindres carrés).

Corrigé 16

Démonstration

```
1 def esperance(valeurs, probas):
2     return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))
3
4 def est_equitable(valeurs, probas):
```

```
5     return abs(esperance(valeurs, probas)) < 1e-9
6
7 # Jeu de l'exemple du cours : gains -2,-1,0,1,2,3 chacun avec proba
   1/6
8 val = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]
9 pro = [1/6] * 6
10 print(esperance(val, pro))    # 0.5 -> donc PAS equitable
11 print(est_equitable(val, pro)) # False
```

L'espérance vaut $0,5 \neq 0$, donc `est_equitable` renvoie `False` : ce jeu est favorable au joueur, pas équitable. Il deviendrait équitable en augmentant la mise de 0,5 €.

Corrigé du problème type prépa

Démonstration / Partie A : loi, espérance et variance de $D = |D_1 - D_2|$

1. La différence en valeur absolue de deux faces va de 0 (faces égales) à 5 (par exemple 6 et 1) : $D(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On compte, parmi les 36 couples (D_1, D_2) équiprobables, ceux donnant chaque écart :

- $D = 0$: $(1, 1), \dots, (6, 6)$, soit 6 couples.
- $D = 1$: $(1, 2), (2, 1), \dots$: il y a 5 paires de faces consécutives, chacune dans 2 ordres, soit $2 \times 5 = 10$.
- $D = 2$: 4 paires possibles $\times 2$ ordres = 8.
- $D = 3$: $3 \times 2 = 6$. $D = 4$: $2 \times 2 = 4$. $D = 5$: $1 \times 2 = 2$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(D = k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Vérification : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$. ✓

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(D) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2) = \frac{0 + 10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \approx 1,94.$$

Moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(D^2) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 16 \cdot 4 + 25 \cdot 2) = \frac{0 + 10 + 32 + 54 + 64 + 50}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83.$$

Variance (Kœnig-Huygens) :

$$\mathbb{V}(D) = \mathbb{E}(D^2) - (\mathbb{E}(D))^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{35}{6} - \frac{1225}{324}.$$

On réduit au même dénominateur 324 : $\frac{35}{6} = \frac{1890}{324}$, donc

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1890 - 1225}{324} = \frac{665}{324} \approx 2,05.$$

Démonstration / Partie B : le jeu d'argent $G = D^2 - m$

3. On utilise la transformation affine $G = D^2 - m$ (ici la « variable » est D^2 , et on lui retranche la constante m) :

$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(D^2) - m = \frac{35}{6} - m.$$

4. Jeu équitable : $\mathbb{E}(G) = 0$, donc

$$m = \mathbb{E}(D^2) = \frac{35}{6} \approx 5,83 \text{ €}.$$

Il faut miser environ 5,83 € pour que le jeu soit équitable.

5. Comme $G = D^2 - m$ avec m constante, $\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(D^2)$: retrancher une constante ne change pas la dispersion. Il faut donc la variance de la variable D^2 . Posons $W = D^2$, de valeurs 0, 1, 4, 9, 16, 25

avec les mêmes probabilités que D . On a déjà $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(D^2) = \frac{35}{6}$. Calculons $\mathbb{E}(W^2) = \mathbb{E}(D^4)$:

$$\mathbb{E}(D^4) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 16 \cdot 8 + 81 \cdot 6 + 256 \cdot 4 + 625 \cdot 2) = \frac{2898}{36} = \frac{161}{2} = 80,5.$$

Donc

$$\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(W) = \mathbb{E}(D^4) - (\mathbb{E}(D^2))^2 = 80,5 - \left(\frac{35}{6}\right)^2 = 80,5 - \frac{1225}{36} \approx 80,5 - 34,03 = 46,47.$$

$$\sigma(G) = \sqrt{46,47} \approx 6,82 \text{ €}.$$

Interprétation (une phrase). Même « équitable » ($\mathbb{E}(G) = 0$), le jeu a un écart-type élevé ($\approx 6,82$ €, supérieur à la mise) : les résultats sont très dispersés, un joueur prudent sait donc qu'il peut perdre gros sur quelques parties, ce que l'espérance nulle ne dit pas.

Démonstration / Partie C : simulation

6. On simule deux dés, on calcule l'écart au carré, on retranche la mise, et on moyenne :

```
1 from random import randint
2
3 def simule_gain(n, m):
4     total = 0
5     for _ in range(n):
6         d1 = randint(1, 6)
7         d2 = randint(1, 6)
8         gain = (abs(d1 - d2))**2 - m    # G = D^2 - m
9         total += gain
10    return total / n
11
12 # Avec la mise équitable m = 35/6 :
13 print(simule_gain(1000000, 35/6))    # proche de 0
```

Si $m = \frac{35}{6}$ est la mise équitable, alors $\mathbb{E}(G) = 0$: d'après le principe de la loi des grands nombres, le gain moyen observé sur n parties se rapproche de 0 quand n devient grand. La simulation **confirme** numériquement le calcul théorique.

Bravo ! Tu maîtrises maintenant les variables aléatoires : **loi**, **espérance** (la moyenne sur le long terme), **variance** et **écart-type** (la dispersion), et les formules **affines**. C'est le socle direct de la **loi binomiale** et des grands théorèmes de Terminale. Prochaine étape : la fiche 11, **algorithmique et programmation en Python**.